अध्याय 13

सीमा और अवकलज

13.1 समग्र अवलोकन (Overview)

13.1.1 *एक फलन की सीमा (Limit of a Function)*

माना f, अंतराल I में परिभाषित एक फलन है। हम अंतराल I के किसी बिन्दु a पर फलन f की सीमा की अवधारणा का अध्ययन करेंगे।

हम कहते हैं कि $\lim_{x \to a^-} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है, जिसने a के बाईं ओर निकट मानों के लिए f के मान दिए हैं। वह मान a पर f की बाएँ पक्ष की सीमा कहलाती है।

हम कहते हैं कि $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $x = a$ पर $f(x)$ का अपेक्षित मान है जिसने a के दाईं ओर निकट मानों के लिए f के मान दिये हैं। यह मान a पर f की दाएँ पक्ष की सीमा कहलाती है।

यदि दाएँ और बाएँ पक्ष की सीमाएँ संपाती हों तो हम इस उभयनिष्ठ मान को $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा कहते हैं और इसे $\lim_{x \to a} f(x)$ से निर्दिष्ट करते हैं।

सीमाओं के गुणधर्म (Some properties of limits)

मान लीजिए कि f और g दो ऐसे फलन हैं कि $\lim_{x \to a} f(x)$ और $\lim_{x \to a} g(x)$ दोनों का अस्तित्व है। तब

(i) $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$

(ii) $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$

(iii) प्रत्येक वास्तविक संख्या α के लिए

$$\lim_{x \to a} (\alpha f)(x) = \alpha \lim_{x \to a} f(x)$$

(iv) $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x)]$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$, दिया हुआ है $g(x) \neq 0$

बहुपदों एवं परिमेय फलनों की सीमाएं यदि f एक बहुपदी फलन है, तो $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व होता है और

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ से प्राप्त होती है।

एक महत्वपूर्ण सीमा

एक महत्वपूर्ण बहुत उपयोगी सीमा नीचे दी हुई है:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

टिप्पणी: *यदि 'a' धनात्मक है, तो उपरोक्त व्यंजक सभी परिमेय संख्याओं n के लिए प्रमाणित है।*

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाएं

त्रिकोणमितीय फलनों की सीमाओं का मान ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित सीमाओं का उपयोग करेंगे:

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (ii) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ (iii) $\lim_{x \to 0} \sin x = 0$

13.1.2 *अवकलज (Derivatives):* कल्पना कीजिए f एक वास्तविक मानीय फलन है, तो

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \ldots (1)$$

अवकलज कहलाता है यदि (1) के दाईं तरफ की सीमा अस्तित्व में है।

फलनों के अवकलज का बीजगणित (Algebra of derivative of functions) क्योंकि अवकलज की यथार्थ परिभाषा में सीमा निश्चय ही सीधे रूप में सम्मिलित है। हम अवकलज के नियमों को निकटता से सीमा के नियमों के अनुगमन की आशा करते हैं जैसा कि नीचे दिया हुआ है:

मान लीजिए f और g दो ऐसे फलन हैं कि उनके उभयनिष्ठ प्रांत में उनके अवकलज परिभाषित हैं। तब

(i) दो फलनों के योग का अवकलज उन फलनों के अवकलजों का योग है।

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

(ii) दो फलनों के अंतर का अवकलज उनके अवकलजों का अन्तर है।

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

(iii) दो फलनों के गुणन का अवकलज निम्नलिखित गुणन नियम से प्राप्त होता है:

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx} f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)$$

इसको Leibnitz के दो फलनों के गुणन के नियम से सम्बन्ध जोड़ा जाता है।

(iv) दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्नलिखित भागफलनियम से प्राप्त होता है (जहां कहीं हर का फलन शून्य नहीं है)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)\cdot g(x) - f(x)\cdot\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{(g(x))^2}$$

13.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न

उदाहरण 1 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right]$

हल हम पाते हैं

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x^3-3x^2+2x}\right] = \lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x(x-1)-2(2x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-5x+6}{x(x-1)(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 2}\left[\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}\right] \quad [x-2 \neq 0]$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x(x-1)} = \frac{-1}{2}$$

उदारहण 2 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$

हल $y = 2 + x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि जब $x \to 0, y \to 2$

इसलिए $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x} = \lim_{y\to 2}\frac{y^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}}}{y-2} = \frac{1}{2}(2)^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\cdot 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

उदाहरण 3 यदि $\lim_{x\to 3}\frac{x^n - 3^n}{x-3} = 108$, तो धनात्मक पूर्णांक n ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n - 3^n}{x-3} = n(3)^{n-1}$$

इसलिए $\quad n(3)^{n-1} = 108 = 4\,(27) = 4(3)^{4-1}$

तुलनात्मक दृष्टि से हम $n = 4$ प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 4 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

हल $y = \frac{\pi}{2} - x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि जब $y \to 0, x \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x) = \lim_{y\to 0}[\sec(\frac{\pi}{2} - y) - \tan(\frac{\pi}{2} - y)]$$

$$= \lim_{y\to 0}(\text{cosec } y - \cot y)$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\sin y} - \frac{\cos y}{\sin y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{\sin y}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}} \qquad \text{since, } \sin^2\frac{y}{2} = \frac{1-\cos y}{2}, \quad \sin y = 2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}$$

$$= \lim_{\frac{y}{2}\to 0}\tan\frac{y}{2} = 0$$

उदाहरण 5 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x}$

हल (i) हम पाते हैं

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2+x)-\sin(2-x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos\frac{(2+x+2-x)}{2}\sin\frac{(2+x-2+x)}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2\sin x}{x}$$

$$= 2\cos 2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 2\cos 2 \quad \text{as} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

उदाहरण 6 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = ax + b$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ a तथा b शून्येतर अचर हैं।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{bh}{h} = b$$

उदाहरण 7 प्रथम सिद्धान्त की सहायता से $f(x) = ax^2 + bx + c$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ, a, b, c शून्येत्तर अचर हैं।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2+b(x+h)+c-ax^2-bx-c}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{bh+ah^2+2axh}{h} = \lim_{h\to 0} ah+2ax+b = b+2ax$$

उदाहरण 8 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = x^3$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + h^3 + 3xh(x+h) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h^2 + 3x(x + h)) = 3x^2$$

उदाहरण 9 प्रथम सिद्धांत की सहायता से $f(x) = \frac{1}{x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}.$$

उदाहरण 10 प्रथम सिद्धांत से, $f(x) = \sin x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{2 \cdot \frac{h}{2}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \cos\frac{(2x+h)}{2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x.1 = \cos x$$

उदाहरण 11 प्रथम सिद्धांत से $f(x) = x^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

हल परिभाषा के अनुसार,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

द्विपद प्रमेय के उपयोग से हमें $(x + h)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, h + ... + {}^nC_n\, h^n$, प्राप्त है।

अतः $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\,(nx^{n-1} + ... + h^{n-1}]}{h} = nx^{n-1}.$$

उदाहरण 12 $2x^4 + x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = 2x^4 + x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^4) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$= 2 \times 4x^{4-1} + 1x^0$$

$$= 8x^3 + 1$$

इसलिए $$\frac{d}{dx}(2x^4 + x) = 8x^3 + 1.$$

उदाहरण 13 $x^2 \cos x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए

हल मान लीजिए $y = x^2 \cos x$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 \cos x)$$

$$= x^2 \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 (-\sin x) + \cos x\ (2x)$$

$$= 2x \cos x - x^2 \sin x$$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

उदाहरण 14 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

हल ध्यान दीजिए:

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = (2\sin x - 1)(\sin x + 1)$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = (2\sin x - 1)(\sin x - 1)$$

इसलिए, $$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \qquad \text{(as } 2\sin x - 1 \neq 0\text{)}$$

$$= \frac{1 + \sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6} - 1} = -3$$

उदाहरण 15 मान ज्ञात कीजिए $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

हल हमें प्राप्त है

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x \left(4\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 16 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}}$

हल हम पाते हैं $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{a+2x} - \sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}}{\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{a + 2x - 3x}{\left(\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(a - x)\left(\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)\left(\sqrt{3a+x} - 2\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(a - x)\left(\sqrt{3a+x} + 2\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a+2x} + \sqrt{3x}\right)(3a + x - 4x)}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3 \times 2\sqrt{3a}} = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

उदाहरण 17 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{\cos cx - 1}$

हल हम पाते हैं: $\lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{(a+b)}{2}x \ \sin\frac{(a-b)x}{2}}{2\frac{\sin^2 cx}{2}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\sin\frac{(a+b)x}{2}\cdot\sin\frac{(a-b)x}{2}}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2\frac{cx}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{(a+b)x}{2}}{\frac{(a+b)x}{2}\cdot\frac{2}{a+b}}\cdot\frac{\sin\frac{(a-b)x}{2}}{\frac{(a-b)x}{2}\cdot\frac{2}{a-b}}\cdot\frac{\left(\frac{cx}{2}\right)^2\times\frac{4}{c^2}}{\sin^2\frac{cx}{2}}$$

$$= \frac{a+b}{2}\times\frac{a-b}{2}\times\frac{4}{c^2} = \frac{a^2-b^2}{c^2}$$

उदाहरण 18 मान ज्ञात कीजिए: $\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 \sin(a+h) - a^2 \sin a}{h}$

हल हमें प्राप्त है $\lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 \sin(a+h) - a^2 \sin a}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(a^2+h^2+2ah)[\sin a\cos h + \cos a\sin h] - a^2\sin a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{a^2\sin a(\cos h - 1)}{h} + \frac{a^2\cos a\sin h}{h} + (h+2a)(\sin a\cos h + \cos a\sin h)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2\sin a\left(-2\sin^2\frac{h}{2}\right)}{\frac{h^2}{2}}\cdot\frac{h}{2} + \lim_{h\to 0}\frac{a^2\cos a\sin h}{h} + \lim_{h\to 0}(h+2a)\sin(a+h)$$

$$= a^2 \sin a \times 0 + a^2 \cos a\ (1) + 2a \sin a$$
$$= a^2 \cos a + 2a \sin a.$$

उदाहरण 19 प्रथम सिद्धांत से $f(x) = \tan (ax + b)$, का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan \big(a(x+h)+b\big) - \tan (ax+b)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\sin (ax+ah+b)}{\cos (ax+ah+b)} - \dfrac{\sin (ax+b)}{\cos (ax+b)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin (ax+ah+b)\cos (ax+b) - \sin (ax+b)\cos (ax+ah+b)}{h \cos (ax+b) \cos (ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a \sin (ah)}{a \cdot h \cos (ax+b) \cos (ax+ah+b)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a}{\cos (ax+b) \cos (ax+ah+b)} \lim_{ah\to 0} \frac{\sin ah}{ah} \quad [\text{as } h \to 0\ ah \to 0]$$

$$= \frac{a}{\cos^2 (ax+b)} = a \sec^2 (ax + b).$$

उदाहरण 20 $f(x) = \sqrt{\sin x}$, का अवकलज प्रथम सिद्धांत की सहायता से ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा के अनुसार,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{\sin (x+h)} - \sqrt{\sin x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{\sin (x+h)} - \sqrt{\sin x}\right)\left(\sqrt{\sin (x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}{h\left(\sqrt{\sin (x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\ \sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}\left(\sqrt{\sin(x+h)} + \sqrt{\sin x}\right)}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{1}{2}\cot x\sqrt{\sin x}$$

उदाहरण 21 $\frac{\cos x}{1+\sin x}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(1+\sin x)(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण संख्या 22 से 28 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q.)

उदाहरण 22 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)}$ का मान है:

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) –1

हल सही उत्तर (B) है।

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{x \ 2\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}$$

उदारहण 23 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x}$ का मान है:

(A) 0 (B) –1 (C) 1 (D) अस्तित्वहीन है।

हल सही उत्तर (A) है। क्योंकि

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cos x} = \lim_{y \to 0} \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} \quad \frac{\pi}{2} - x = \text{ लेने पर}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1-\cos y}{\sin y} = \lim_{y \to 0} \frac{2\sin^2 \frac{y}{2}}{2\sin \frac{y}{2} \cos \frac{y}{2}} = \lim_{y \to 0} \tan \frac{y}{2} = 0$$

उदाहरण 24 $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ बराबर है:

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) अस्तित्वहीन है

हल सही उत्तर (D) है।

क्योंकि R.H.S = $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$

एवं L.H.S = $\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$

उदाहरण 25 $\lim_{x \to 1} [x-1]$, का मान निम्नलिखित में से कौन-सा है? जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन है।

(A) 1 (B) 2 (C) 0 (D) does not exists

हल सही उत्तर (D) है।

क्योंकि R.H.S = $\lim_{x \to 1^+} [x-1] = 0$

एवं L.H.S = $\lim_{x \to 1^-} [x-1] = -1$

उदाहरण 26 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ का मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) अस्तित्वहीन है

हल सही उत्तर (A) है।

क्योंकि $\lim_{x \to 0} x = 0$ एवं $-1 \le \sin \frac{1}{x} \le 1$ (सैंडविच प्रमेय के अनुसार)

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

उदाहरण 27 $\lim_{n \to \infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$, $n \in \mathbf{N}$

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

हल सही उत्तर (C) है। क्योंकि $\lim_{x\to\infty} \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\ 1+\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 28 यदि $f(x) = x \sin x$, तो $f'\ \frac{\pi}{2}$ का मान है:

(A) 0 (B) 1 (C) –1 (D) $\frac{1}{2}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि $f'(x) = x \cos x + \sin x$

इसलिए $$f'\ \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

13.3 प्रश्नावली

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

मान ज्ञात कीजिए:

1. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ **2.** $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1}$ **3.** $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}}{x}$ **5.** $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^6-1}{(1+x)^2-1}$ **6.** $\lim_{x\to a} \frac{(2+x)^{\frac{5}{2}}-(a+2)^{\frac{5}{2}}}{x-a}$

7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ **8.** $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+2}}$

9. $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^4-4}{x^2+3\sqrt{2}x-8}$ **10.** $\lim_{x\to 1} \frac{x^7-2x^5+1}{x^3-3x^2+2}$ **11.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^2}$

12. $\lim_{x\to -3} \frac{x^3+27}{x^5+243}$ **13.** $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{8x-3}{2x-1} - \frac{4x^2+1}{4x^2-1}$

14. Find 'n', if $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^n - 2^n}{x - 2} = 80$, $n \in \mathbf{N}$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 7x}$

16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 4x}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$

18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x - \sin 2x}{x^3}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos mx}{1 - \cos nx}$

20. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sqrt{1 - \cos 6x}}{\sqrt{2}\;\frac{\pi}{3} - x}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$

22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\sqrt{3}\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x + 3x}{2x + \tan 3x}$

24. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

25. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cot^2 x - 3}{\operatorname{cosec} x - 2}$

26. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

27. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 2\sin 3x + \sin 5x}{x}$

28. यदि $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to k} \dfrac{x^3 - k^3}{x^2 - k^2}$ तो k का मान ज्ञात कीजिए।

प्रश्न संख्या 29 से 42 तक प्रत्येक फलन का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

29. $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 + 1}{x}$

30. $\left. x + \dfrac{1}{x} \right.^{3}$

31. $(3x + 5)(1 + \tan x)$

32. $(\sec x - 1)(\sec x + 1)$

33. $\dfrac{3x + 4}{5x^2 - 7x + 9}$

34. $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$

35. $\dfrac{x^2 \cos \frac{\pi}{4}}{\sin x}$

36. $(ax^2 + \cot x)(p + q\cos x)$

37. $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ **38.** $(\sin x+\cos x)^2$ **39.** $(2x-7)^2\,(3x+5)^3$

40. $x^2\sin x+\cos 2x$ **41.** $\sin^3 x\cos^3 x$ **42.** $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

प्रश्न संख्या 43 से 46 तक प्रत्येक फलन का प्रथम सिद्धांत की सहायता से x के सापेक्ष अवकलन कीजिए–

43. $\cos(x^2+1)$ **44.** $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ **45.** $x^{\frac{2}{3}}$ **46.** $x\cos x$

प्रश्न संख्या 47 से 53 तक प्रत्येक सीमा का मान ज्ञात कीजिए–

47. $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{(x+y)\sec(x+y)-x\sec x}{y}$

48. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin(\alpha+\beta)x+\sin(\alpha-\beta)x+\sin 2\alpha\, x)}{\cos 2\beta x-\cos 2\alpha x}\cdot x$

49. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\tan^3 x-\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$ **50.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{4}-\sin\frac{x}{4}\right)}$

51. दर्शाइए कि $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{x-4}$ अस्तित्वहीन है।

52. मान लीजिए $f(x)=\begin{cases}\dfrac{k\cos x}{\pi-2x} & \text{जब } x\neq\dfrac{\pi}{2}\\ 3 & \text{जब } x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ और यदि $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

53. मान लीजिए $f(x)=\begin{cases}x+2 & x\le -1\\ cx^2 & x>-1\end{cases}$, और यदि $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$ अस्तित्व में है तो 'c' का मान ज्ञात कीजिए।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

प्रश्न संख्या 54 से 76 तक प्रत्येक के लिए दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर का चयन कीजिए (M.C.Q).

54. $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$ का मान है:

(A) 1 (B) 2 (C) –1 (D) –2

55. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos x}{1 - \cos x}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{-3}{2}$ (D) 1

56. $\lim_{x \to 0} \frac{(1 + x)^n - 1}{x}$ का मान है:

(A) n (B) 1 (C) $-n$ (D) 0

57. $\lim_{x \to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ का मान है:

(A) 1 (B) $\frac{m}{n}$ (C) $-\frac{m}{n}$ (D) $\frac{m^2}{n^2}$

58. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 4\theta}{1 - \cos 6\theta}$ का मान है:

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) –1

59. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{x}$ का मान है:

(A) $\frac{-1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

60. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x + 1} - \sqrt{1 - x}}$ का मान है:

(A) 2 (B) 0 (C) 1 (D) –1

61. $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x - 2}{\tan x - 1}$ का मान है:

(A) 3 (B) 1 (C) 0 (D) $\sqrt{2}$

62. $\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(2x - 3)}{2x^2 + x - 3}$ बराबर है:

(A) $\frac{1}{10}$ (B) $\frac{-1}{10}$ (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

63. यदि $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin[x]}{[x]}, & [x] \neq 0 \\ 0, & [x] = 0 \end{cases}$, जहाँ [.] महत्तम पूर्णांक फलन को निर्दिष्ट करता है, तो

$\lim_{x \to 0} f(x)$ का मान है:

(A) 1 (B) 0 (C) –1 (D) इनमें से कोई नहीं

64. $\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{x}$ का मान है:

(A) 1 (B) –1 (C) अस्तित्वहीन है (D) इनमें से कोई नहीं

65. मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & 0 < x < 2 \\ 2x + 3, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$, यदि $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ एवं $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ एक द्विघात समीकरण के मूल है, तो वह द्विघात समीकरण है:

(A) $x^2 - 6x + 9 = 0$ (B) $x^2 - 7x + 8 = 0$

(C) $x^2 - 14x + 49 = 0$ (D) $x^2 - 10x + 21 = 0$

66. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x - x}{3x - \sin x}$ का मान है:

(A) 2 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{-1}{2}$ (D) $\frac{1}{4}$

67. मान लीजिए $f(x) = x - [x]; \in \mathbf{R}$, तो $f'\ \frac{1}{2}$ का मान है:

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 1 (C) 0 (D) –1

68. यदि $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ at $x = 1$ का मान है:

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) 0

69. यदि $f(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) $\frac{5}{4}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) 1 (D) 0

70. यदि $y = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान है:

(A) $\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (B) $\frac{-4x}{x^2-1}$ (C) $\frac{1-x^2}{4x}$ (D) $\frac{4x}{x^2-1}$

71. यदि $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$, तो $\frac{dy}{dx}$ के लिए $x = 0$ का मान है:

(A) –2 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) अस्तित्वहीन

72. यदि $y = \frac{\sin(x+9)}{\cos x}$, तो $x = 0$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान है:

(A) cos 9 (B) sin 9 (C) 0 (D) 1

73. यदि $f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^{100}}{100}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) $\frac{1}{100}$ (B) 100 (C) अस्तित्वहीन (D) 0

74. यदि किसी अचर a के लिए $f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a}$, तो $f'(a)$ का मान है:

(A) 1 (B) 0 (C) अस्तित्वहीन (D) $\frac{1}{2}$

75. यदि $f(x) = x^{100} + x^{99} + ... + x + 1$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) 5050 (B) 5049 (C) 5051 (D) 50051

76. यदि $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 ... - x^{99} + x^{100}$, तो $f'(1)$ का मान है:

(A) 150 (B) –50 (C) –150 (D) 50

प्रश्न संख्या 77 से 80 तक रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

77. यदि $f(x) = \frac{\tan x}{x - \pi}$, तो $\lim_{x \to \pi} f(x)$ = ________________

78. यदि $\lim_{x \to 0} \sin mx \cot \frac{x}{\sqrt{3}} = 2$, तो m = ________________

79. यदि $y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$, तो $\frac{dy}{dx}$ = ________________

80. $\lim_{x \to 3^+} \frac{x}{[x]}$ = ________________